Chapitre I : Anneau des Polynômes

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sommaire

I. Définitions

Définition : Suite à support fini :

Une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathbb{K}$ est dite à support fini si le nombre d'indices où $a_i \neq 0$ est fini.

Remarque :

Ce sont les suites nulles à partir d'un certain rang.

Définition : Polynôme formel

On appelle polynôme formel à une indéterminée et à coefficient dans $\mathbb{K}$ toute suite à support fini d'élément de $\mathbb{K}$.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes formels à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque :

- Deux polynômes formels sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.
- Polynôme nul : C'est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. (suite nulle)
- Polynôme constant : tous ces coefficients sont nul sauf C_0.
- Le polynôme nul n'est pas un polynôme constant !

Définition : Degré d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si P est non nul, on appelle degré de P, le plus grand indice de coefficient non nul. On le note $\deg P$.
- On pose $\deg 0 = -\infty$.

Définition : Valuation d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si P est non nul, on appelle valuation de P, le plus petit indice de coefficient non nul. On le note $val\ P$.
- On pose, pour le polynôme nul $val\ 0 = +\infty$

Remarque :

Si P est non-nul :

$$val\ P \leq \deg P$$

Définition : Polynôme unitaire

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
On dit que P est un polynôme unitaire si $P \neq 0$ et si $C_{\deg\ P} = 1$.

II. Structure d'anneau de $\mathbb{K}[X]$

1. Addition dans $\mathbb{K}[X]$

Définition : Polynôme somme

Soit deux polynômes A et B. On défini le polynôme C=A+B par ses coefficients en posant, pour $i \in \mathbb{N}$:

$$c_i = a_i + b_i$$

Remarque

La suite $(a_i + b_i)$ est bien à support fini. L'addition ainsi définie est donc une loi interne.

Propriétés : Degré d'une somme

Pour tout polynômes P et Q, on a :

$$\deg(P+Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\}$$

Et si $\deg P \neq \deg Q$:

$$\deg(P+Q) = \max\{\deg P, \deg Q\}$$

Remarque

Si $\deg P = \deg Q$, on peut ne pas avoir l'égalité. (si par exemple, les coefficients des plus grands indices s'annulent

Démonstration

- *Si $P = Q = 0, P + Q = 0$, et l'inégalité est vraie.*
- *Si l'un des deux est non nul, le maximum des degrés est égal au degré du non-nul.*
- *Si les deux sont non-nuls (le refaire)*

Propriété de la valuation

Pour tout polynômes P et Q, on a :

$$val(P+Q) \geq \min\{val\ P, val\ Q\}$$

Et si $val\ P \neq val\ Q$:

$$val(P+Q) = \min\{val\ P, val\ Q\}$$

Propriété de $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ Est un groupe abélien.

Preuve :

- *$+$ interne déjà vu.*
- *L'associativité découle de celle de K.*
- *Le neutre : polynôme nul.*
- *Le symétrique du polynôme P est noté – P*
- *La commutativité découle de celle de K.*

2. Produit dans $\mathbb{K}[X]$

Définition : polynôme produit

Soit deux polynômes A et B. On défini le polynôme C=A.B par ses coefficients en posant, pour $i \in \mathbb{N}$:

$$c_i = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Propriété

Pour tout P et Q :

- $\deg P.Q = \deg P + \deg Q$

- $val\ P.Q = val\ P + val\ Q$

Proposition :
Les seuls polynômes inversibles de K[X] sont les polynômes constants. (Non-nuls)

III.Structure de $\mathbb{K}$-espace-vectoriel :

Définition : Loi interne

Pour tout $k \in \mathbb{K}$, et $P \in \mathbb{K}[X], P = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on pose :

$$k.P = (k.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

Remarque

On a bien $k.P \in \mathbb{K}[X]$.

Propriété 1

$$\forall\, k \in \mathbb{K}^*, \forall\, p \in \mathbb{K}[X],$$
$$\deg k.P = \deg P$$
$$val\ k.P = val\ P$$

Démonstration immédiate.

Propriété 2

$(\mathbb{K}[X], +)$ Muni de cette loi externe est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel. (Démonstration en exercice)

Notation

On pose $x = (0,1,0,0,\dots)$ appelée l'indéterminée.

$$x^n = (0,0,0,\dots,0,1,0\dots) \text{ au rang n}$$

On note aussi :

$$P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i$$

Proposition : Base Canonique de $\mathbb{K}[X]$

La famille infinie $\left(x^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ constitue une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

(La démonstration est à retrouver dans le cours d'algèbre linéaire de 1ère année)

IV. Compléments :

1. Composition de Polynômes

Définition

Soit deux polynômes P et Q avec :

$$P = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i$$

On pose :

$$P \circ Q = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i Q^i$$

Propriété

Pour tout deux polynômes non-nuls P et Q, on a :

$$\deg P \circ Q = \deg P * \deg Q$$

(Démonstration en exercice)

Propriétés

On considère $P, Q, R \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$.

- $(P + \lambda Q) \circ R = P \circ R + \lambda(Q \circ R)$
  Distributivité à gauche de $\circ$.
- $(P.Q) \circ R) = (P \circ R).(Q \circ R)$
- $(P \circ R) \circ Q = P \circ (Q \circ R)$
  Associativité.
- $x \circ P = P \circ x = P$

Remarque

La loi $\circ$ n'est ni commutative, ni distributive à droite.
Preuve

$$\begin{cases} (x^2+1) \circ (-x+x) = 1 \\ (x^2+1) \circ (-x) + (x^2+1) \circ x = 2(x^2+1) \end{cases}$$

2. Dérivation

Définition

Pour tout polynôme P, on appelle polynôme « dérivé » de P, le polynôme défini par :

$$P' = \sum_{i=1}^{n} i \times a_i \times X^{i-1}$$

Propriété

Pour tout polynôme P :

- $\deg P' = \deg P - 1$, Si $\deg P < 0$.
- $\deg P' = -\infty$, Si $\deg P = 0 \; ou - \infty$.

(Démonstration en exercice)

Propriété

Soit deux polynômes P et Q et un scalaire λ.

- $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$
- $(PQ)' = P'Q + Q'P$

Théorème de Leibniz

$$\forall\, P,Q \in (K[x])^2, \qquad \forall\, n \in N, \qquad (PQ)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . P^k . Q^{n-k}$$

3. Fonction Polynômiale

Définition

Pour tout polynôme P, on appelle fonction polynômiale associée à P, la fonction :

$$\tilde{P} = \begin{cases} K \to K \\ x \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i \end{cases}$$

Remarque

On peut aussi avoir des fonctions polynômiales dont la variable est une matrice ou un endomorphisme.

Remarque : Schéma de Hörner

(Pour évaluer une fonction polynômiale en une valeur x donnée.)

Soit un polynôme P, et un scalaire x. On veut calculer $\tilde{P}(x)$.

Exemple :

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \boxed{a_0 + (a_1 + (a_2 + a_3x)x)x}$$

L'intérêt est, bien sur, de gagner du temps et de l'énergie. (seulement trois multiplication dans la forme encadrée, pour six auparavant)

Exemple : $P(X) = x^3 - x^2 + 2x + 3$

Evaluons pour x=2 et pour x=3

$$\begin{array}{ccccl} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ 3 & 2 & -1 & 1 & \tilde{P}(2) = 11 \\ 11 & 4 & 1 & & \end{array}$$